Dimensión

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.*
(1) Cualquier conjunto de generadores de V contiene una base para V.
(2) Si $\{u_1, ..., u_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de V, existen vectores $w_1, w_2, ..., w_{n-m}$ ($n = \dim V$) tales que

$$\beta = \{u_1, ..., u_m, w_1, w_2, ..., w_{n-m}\}$$

es una base de V.

Demostración. Para (1)
Sea $S = \{v_1, ..., v_k\}$ un conjunto de generadores de V. Si S es linealmente independiente, entonces S es una base de V.
En otro caso, según los resultados anteriores existe un vector v_j con $1 \leq j \leq k$ que se puede escribir como combinación lineal de los $k-1$ vectores restantes. Sea $S_1 = S - \{v_j\}$. Según los resultados anteriores $L(S_1) = V$. Si S_1 es linealmente independiente, S_1 es entonces la base requerida. En caso contrario se repite el proceso ya que en algún momento se tendrá un conjunto S_i ($1 \leq i \leq n-1$) linealmente independiente y esa será la base que se requiere.
(2) Sea $S = \{u_1, ..., u_m\}$. Escribimos $V_0 = L(S)$. Si $V_0 = V$, entonces S es la base requerida (pues S es linealmente indpendiente y $L(S) = V$). Caso contrario (o sea $L(S)$ es un subespacio propio de V), existe un vector $w_1 \in W$ tal que $w_1 \notin L(S)$. Según los resultados anteriores, el conjunto $S_1 = S \bigcup \{w_1\}$ es linealmente independiente. Escribimos $V_1 = L(S_1)$. Si $V_1 = V$, S_1 es la base requerida. Caso contrario existe $w_2 \in V$, $w_2 \notin L(S_1)$, etc. Al continuar este proceso, se llegará a lo más en $n-m$ etapas, a un conjunto linealmente independiente que genere V. Ésta será la base requerida. □

Teorema 2. *Sea W un subespacio del espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces W es de dimensión finita y* $\dim\ W \leq \dim\ V$.

Demostración. Sea $w_1 \in W$. Si $L(w_1) = W$ entonces $\{w_1\}$ es base de W (y por tanto de dimensión finita) que puede completarse para formar una base de V. En tal caso se tiene $\dim\ W \leq \dim\ V$.
Si $L(w_1) \neq W$, tómese $w_2 \in W$, $w_2 \notin L(W_1)$. El conjunto $\{w_1, w_2\}$ es linealmente independiente. Si $L(w_1, w_2) = W$ entonces $\{w_1, w_2\}$ es una bse de W (y entonces W es de dimensión finita) que se puede completar para formar una base de V. En éste caso, $\dim\ W \leq \dim\ V$. Continúese con éste proceso tantas veces como sea necesario hasta obtener una base de W. Obsérvese que no se puede tener más de $\dim V$ etapas. Esto muestra que W es de dimensión finita. Con la base obtenida de W, comlétese hasta formar una base de . Entonces $\dim\ W \leq \dim\ V$ □

Teorema 3. *Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \bigcap W_2)$$

Demostración. Sea $r = \dim(W_1 \bigcap W_2)$ tomamos entonces una base

$$\beta_0 = \{v_1, ..., v_r\}$$

de $W_1 \bigcap W_2$

1. β_0 se puede extender para obtener una base β_1 de W_1 y β_2 de W_2

2. Sea $\beta_1 = \{v_1, ..., v_r, x_1, ..., x_n\}$ y $\beta_2 = \{v_1, ..., v_r, y_1, ..., y_m\}$
3. $\dim \beta_1 = r + n$ y $\dim \beta_2 = r + m$
4. Afirmamos que el conjunto $\beta = \beta_0 \bigcup \beta_1 \bigcup \beta_2$ es base de $W_1 + W_2$

Demostración. β genera a $W_1 + W_2$. En efecto
Sea $w_1 \in W_1$ entonces

$$v = w_1 + w_2, \quad w_1 \in W_1, \ w_2 \in W_2$$

por ser β_1 base de W_1 y β_2 base de W_2

$$w_1 = c_1v_1 + \cdots + c_rv_r + d_1x_1 + \cdots + d_nx_n$$

$$w_2 = c_1'v_1 + \cdots + c_r'v_r + d_1'y_1 + \cdots + d_m'x_m$$

por tanto

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_rv_r + d_1x_1 + \cdots + d_nx_n + c_1'v_1 + \cdots + c_r'v_r + d_1'y_1 + \cdots + d_m'x_m$$

en consecuencia $L(\beta) = W_1 + W_2$ β es linealmente independiente
Tomamos una combinación lineal

$$a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + c_1y_1 \cdots + c_my_m = 0$$

que se puede escribir

$$\underbrace{-c_1y_1 - \cdots - c_my_m}_{\in W_2} = \underbrace{a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n}_{\in W_1}$$

por lo que

$$-c_1y_1 - \cdots - c_my_m \in W_1 \bigcap W_2$$

Al ser β_0 base de $W_1 \bigcap W_2$ existen escalares $k_1, ..., k_r$ tal que

$$-c_1y_1 - \cdots - c_my_m = k_1v_1 - \cdots k_rv_r$$

o bien

$$k_1v_1 - \cdots k_rv_r + c_1y_1 + \cdots + c_my_m = 0$$

al ser β_2 base de W_2 se tiene $k_1 = \cdots = k_r = c_1 = \cdots = c_m = 0$

de la espresión

$$-c_1y_1 - \cdots - c_my_m = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$$

se tiene

$$\underbrace{a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1x_1 + \cdots + b_nx_n}_{\in \beta_1} = 0$$

al ser β_1 base se tiene

$$a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots b_n = 0$$

por lo tanto β es linealmente independiente □

5. entonces β es base de $W_1 + W_2$ de manera que

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) &= r + n + m \\ &= (r + n) + (r + m) - r \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \bigcap W_2)\end{aligned}$$

□